Programme de colle n°27

semaine du 18 au 22 mai

Notions vues en cours

Chapitre 34 : Théorie de l'intégration

- Subdivision $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ d'un intervalle $\left[a,b\right]$, pas et support d'une subdivision (noté $\text{Supp}(\sigma) = \{x_0, \cdots, x_n\}$), σ' est plus fine que σ si $\text{Supp}(\sigma) \subset \text{Supp}(\sigma')$, ce qu'on notera $\sigma \subset \sigma'$
- Réunion de deux subdivisions σ et σ', notée $\sigma \cup \sigma'$, cette réunion est plus fine que σ et que σ'
- Fonction en escalier sur $\left[a,b\right]$, subdivision adaptée, l'ensemble des fonctions en escalier $\mathcal{E}(\left[a,b\right], \mathbb{K})$ est un sous-e.v. et un sous-anneau de $\mathbb{K}^{\left[a,b\right]}$, toute fonction en escalier est bornée
- Intégrale d'une fonction en escalier, notation $\displaystyle\int_{\left[a,b\right]} f$, généralisation sans supposer $a < b$ avec la notation $\displaystyle\int_a^b f$
- Fonction réelle continue par morceaux, subdivision adaptée, l'ensemble des fonctions continues par morceaux $\mathcal{CM}(\left[a,b\right], \mathbb{R})$ est un sous-e.v. et un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$, toute fonction continue par morceaux est bornée
- Toute fonction continue par morceaux peut être "approchée" aussi près qu'on veut par une fonction en escalier, construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux par cette "approximation"
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, **inégalité triangulaire intégrale**, toute fonction continue positive d'intégrale nulle est égale à la fonction nulle
- Fonction complexe continue par morceaux, ensemble $\mathcal{CM}(\left[a,b\right], \mathbb{C})$, intégrale d'une fonction complexe, formules $\displaystyle\int \text{Re} f = \text{Re} \int f$ et $\displaystyle\int \text{Im} f = \text{Im} \int f$
- Vu en exercice : calcul de limites d'intégrales à paramètre par encadrement / majorations / minorations
- Généralisation du Théorème Fondamental de l'Analyse : dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$
- **Somme de Riemann** associée à une fonction f : définition, convergence
- **Formule de Taylor avec reste intégral**, inégalité de Taylor-Lagrange
- **Continuité uniforme** : définition, interprétation géométrique, théorème de Heine
- Propriété f lipschitzienne $\Longrightarrow$ f uniformément continue $\Longrightarrow$ f continue

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Questions Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **32 à 34**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont exigibles. Les énoncés des définitions et théorèmes doivent être clairement... énoncés !*

1. Définition de fonction en escalier, définition de fonction continue par morceaux, théorème fondamental de l'analyse généralisé Chapitre 34, Définitions 34.4 et 34.8, Corollaire 34.17
2. Formule de Taylor avec reste intégral (avec démonstration), et inégalité de Taylor-Lagrange (sans démonstration) Chapitre 34, Théorèmes 34.21 et 34.22
3. Définition de fonction uniformément continue, démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Chapitre 34, Définition 34.23 et Exemple 20

Questions Flash au programme :

Chapitre 34 :

- Compléter : "Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\le i\le n}$ de $[a,b]$ telle que ..."
- Compléter : "Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\le i\le n}$ de $[a,b]$ telle que ..."
- Sous quelles conditions sur α, β et f est-ce que la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ est dérivable ? Donner l'expression de $\varphi'(x)$.
- Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann.
- Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
- Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue en termes de quantificateurs.
- Compléter :

$$f \quad \ldots\ldots \quad \Longrightarrow \quad f \text{ uniformément continue} \quad \Longrightarrow \quad f \quad \ldots\ldots$$

- Énoncer le théorème de *Heine*.

Chapitre 33 : (les notations sont sous-entendues)

- Soit $f : E \times E \to F$. Que signifie "f est bilinéaire" ?
- Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. Que signifie l'assertion "f est antisymétrique" ?
- Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. Que signifie l'assertion "f est alternée" ?
- Compléter la formule suivante : $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \ldots\ldots$
- Développer le déterminant suivant selon la seconde ligne : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. On écrira bien chaque terme du développement sans simplification supplémentaire, et on ne demande pas de terminer le calcul.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Compléter la formule : $\det f = \ldots\ldots\ldots\ldots$ (on attend une expression qui dépend de $\mathcal{B}$).

- Soit $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Existe-t-il des formules pour le déterminant de $A+B$, de λA et de AB ? Si oui, les donner.
- Si deux matrices sont semblables, que peut-on dire de leur déterminant ? Est-ce une équivalence ?
- Soit $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. Donner l'expression de $[\mathrm{Com}(A)]_{ij}$ avec i et j des entiers choisis par l'examinateur.
- Donner la formule qui fait intervenir une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et sa comatrice $\mathrm{Com}(A)$.
- Soit $AX = B$ un système linéaire. À quelle condition ce système est-il appelé un système de Cramer ?

Chapitre 32 : (les notations sont sous-entendues)

- Qu'appelle-t-on une permutation d'un ensemble E ? Donner un exemple classique de permutation de E.
- Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ un élément de S_5. Compléter : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \end{pmatrix}$
- Définir le support d'une permutation σ. Que peut-on dire de deux cycles dont les supports sont disjoints ?
- Quel est le résultat de décomposition d'une permutation σ en lien avec les cycles ? Est-ce qu'il y a unicité de cette décomposition ?
- Quel est le résultat de décomposition d'une permutation σ en lien avec les transpositions ? Est-ce qu'il y a unicité de cette décomposition ?
- Soit $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ un cycle. Donner la formule qui décompose ce cycle en produit de transpositions.
- Soit $\sigma \in S_n$. À quelle condition est-ce que σ est une permutation impaire ? Que vaut alors sa signature ?
- Quel sont les ensembles de départ et d'arrivée de l'application signature ε ? Que peut-on dire de plus sur ε par rapport à ces deux ensembles ?